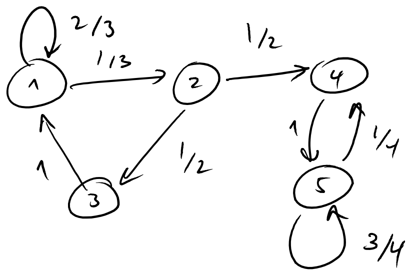
- sběratel kupónů
- míchání karet
- samoupravující se seznamy
- generování náhodného obarvení grafu

Markovský proces:

Př:



$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

- Markovský proces s maticí přechodu $P = (p_{ij})$
  množina stavů $S = \{1, \dots, n\}$
  náhodné proměnné $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$
  splňující $\forall t \geq 1, \forall i, j \in \{1, .. n\}$
  $$Pr[X_t = j \mid X_{t-1} = i] = p_{ij}$$
- počáteční rozdělení mark. procesu $p \in [0,1]^n$
  t.ž. $p_i = Pr[X_0 = i]$
- $Pr[X_t = j \mid X_{t-1} = i \;\&\; X_{t-2} = k \;\&\; \dots] = Pr[X_t = j \mid X_{t-1} = i]$
- $Pr[X_{t+2} = j \mid X_t = i] = ?$
  $$= \sum_{k \in S} Pr[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot Pr[X_{t+2} = j \mid X_t = i \;\&\; X_{t+1} = k]$$
  $$= \sum_{k \in S} Pr[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot Pr[X_{t+2} = j \mid X_{t+1} = k]$$
  $$= \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot p_{kj}$$

$$\rightarrow \left(P^t\right)_{ij} = Pr[X_t = j \mid X_0 = i]$$

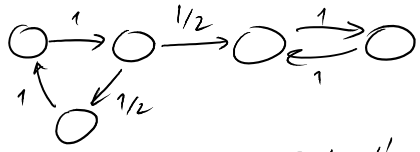
- rozdělení po t krocích: $p^{(t)} = p \cdot P^t$

- stav je rekurentní, pokud
  $$Pr[\exists t,\ X_t = i \mid X_0 = i] = 1$$

jinak je přechodný

- perioda stavu i ... $\gcd\{t;\ t \geq 1,\ p_{ii}^{(t)} \geq 0\}$

Př:



- stavy i a j komunikují, pokud $\exists t, t' > 0$ t.ž. $p_{ij}^{(t)} > 0$ & $p_{ji}^{(t')} > 0$.

- markovovský proces je ireducibilní pokud všechny stavy spolu navzájem komunikují.

- m.p. je aperiodický pokud perioda všech stavů je 1.

→ zajímají nás ireducibilní, aperiodické markovské řetězce (= ergodické)

- doba přechodu z i do j – pro $X_0 = i, X_1, X_2, \ldots$ náhodná proměnná $T_{ij} = \min\{t \geq 1;\ X_t = j\}$ ... může být nekonečná ∞.

- očekávaná doba přechodu i do j

$$m_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$$

pokud $i = j$, pak očekávaná doba návratu m_{ii}.

lema: Pro každý ired., aperiod. m.p. $X_0, X_1, \ldots$ s množinou stavů $S = \{1, \ldots, n\}$ a maticí přechodu P, $\forall i,j \in S$ $\mathbb{E}[T_{ij}] < \infty$.

Dk.: $\exists M \geq 0$ t.ž. $\forall i,j$ $p_{ij}^{(M)} > 0$ (DÚ)

zvol pevně takové M, polož $\alpha = \min_{i,j} p_{ij}^{(M)}$

- zřejmě $\alpha > 0$,
- $\forall t \geq 0$ $\Pr[X_{t+M} = j \mid X_t \neq j] \geq \alpha$

$\Pr[X_{t+M} \neq j \mid X_t \neq j] \leq 1 - \alpha$

$\forall r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Pr[T_{ij} > rM] &\leq \Pr[X_M \neq j \;\&\; X_{2M} \neq j \;\&\; \ldots \;\&\; X_{rM} \neq j] \\ &= \Pr[X_M \neq j] \cdot \Pr[X_{2M} \neq j \mid X_M \neq j] \cdots \\ &\quad \cdots \Pr[X_{rM} \neq j \mid X_{(r-1)M} \neq j] \\ &\leq (1-\alpha)^r\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[T_{ij}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[T_{ij} = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[T_{ij} \geq k]$$

$k=1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $k=1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[T_{ij} > k]$$

$$\le \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell m}^{(\ell+1)m-1} \Pr[T_{ij} > k]$$

$$\le \sum_{\ell=0}^{\infty} m \cdot \Pr[T_{ij} > \ell m]$$

$$\le m \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-\alpha)^{\ell} \le m \cdot \frac{1}{\alpha} \qquad \blacksquare$$

Def: Mějme m.p. $X_0, X_1, X_2, \dots$ s množinou stavů $\{1,\dots,n\}$ a maticí přechodu P. Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ je stacionární distribuce tohoto m.p., pokud

(1) $\forall i \;\; \pi_i \ge 0$ & $\sum_i \pi_i = 1$

(2) $\pi P = \pi$, tj. $\forall j \;\; \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$

Věta: Mějme ired. aperiod. m.p. s maticí přechodu P.

(a) $\exists!\, \pi$ t.ž. $\pi = \pi P$ (existuje stacionární distribuce)

(b) $\forall i,j \;\; \lim_{t\to\infty} \Pr[X_t = j \mid X_0 = i] = \pi_j$

(c) $\mathbb{E}[T_{ii}] = \frac{1}{\pi_i}$.

Dk: Nejprve ukážeme $\lim_{t\to\infty} |p_{ij} - p_{i'j}| \to 0$ $\quad \forall i,i',j$

Párování

$X_0 = i, X_1, X_2, X_3 \dots$
$Y_0 = i', Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ $\qquad$ dvě nezávislé kopie téhož m.p.

interpretujme je jako $Z_t = (X_t, Y_t)$ ... m.p. s n^2 stavy

protože X_t i Y_t jsou ired. a aperiod.

$\exists M$ t.ž. $\forall i, i', j, j'$

$$\Pr[Z_M = (j,j') \mid Z_0 = (i,i')] > 0$$

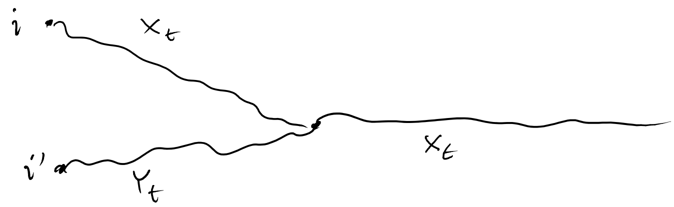
$$\alpha = \min_{(i,i'),(j,j')} \Pr[Z_M = (j,j') \mid Z_0 = (i,i')]$$

$T = \min\{t \ge 0;\; Z_t = (k,k)$ pro nějaké $k \in \{1,\dots,n\}, Z_0 = (i,i')\}$

z minula: $\Pr[T > rM] \le (1-\alpha)^r \qquad \forall r \ge 1$

definujeme Z': $\quad Z'_t = \{ (X_t, Y_t) \quad t < T$

$L(X_t, X_t) \quad t \geq T$



je zřejmé, že pravd. obsazení i' má rozdělení jako X
a druhé jako Y!

Tvrzení: $\forall t, \left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| \leq \Pr[T > t]$

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(t)} &= \Pr[X_t = j] \\
&= \Pr[X_t = j \;\&\; T \leq t] + \Pr[X_t = j \;\&\; T > t] \\
&= \Pr[Y_t = j \;\&\; T \leq t] + \Pr[X_t = j \;\&\; T > t] \\
&\leq \Pr[Y_t = j] + \Pr[T > t] \\
&= p_{i',j}^{(t)} + \Pr[T > t]
\end{aligned}$$

obdobně $\quad p_{i',j}^{(t)} \leq p_{i,j}^{(t)} + \Pr[T > t]$

$$\Rightarrow \quad \left| p_{ij}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| \leq \Pr[T > t]$$

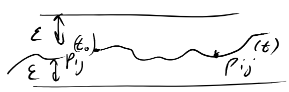
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists t_0 \; \forall t > t_0, \forall i, i', j \quad \left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| \leq \varepsilon$$

$$\longrightarrow \lim_{t \to \infty} \left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i',j}^{(t)} \right| = 0.$$

Nyní ukážeme, že $\lim_{t \to \infty} p_{i,j}^{(t)}$ existuje.

Nechť t_0 je jako výše, pak $\forall t > t_0$

$$\left| p_{i,j}^{(t)} - p_{i,j}^{(t_0)} \right| \leq \varepsilon \; :$$



$$p_{ij}^{(t)} = \sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \cdot p_{kj}^{(t_0)}$$

$$\sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \left(p_{ij}^{(t_0)} - \varepsilon\right) \leq \sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \cdot p_{kj}^{(t_0)} \leq \sum_k p_{ik}^{(t-t_0)} \cdot \left(p_{ij}^{(t_0)} + \varepsilon\right)$$

$$\left(p_{ij}^{(t_0)} - \varepsilon\right) \underbrace{\sum_k p_{ik}^{(t-t_0)}}_{=1} \leq p_{ij}^{(t)} \leq \left(p_{ij}^{(t_0)} + \varepsilon\right) \underbrace{\sum_k p_{ik}^{(t-t_0)}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad \left| p_{ij}^{(t)} - p_{ij}^{(t_0)} \right| < \varepsilon \qquad \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(t)}.$$

položme: $\quad \pi_j = \lim_{t \to \infty} p_{1j}^{(t)} = \lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(t)}$

$(\pi_1, \dots \pi_j)$ je zjevně pstní rozdělení

$$\forall j \qquad p_{ij}^{(t+1)} = \sum_k p_{ik}^{(t)} \cdot p_{kj}$$

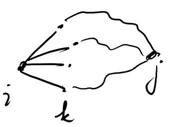
$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t+1)} = \sum_k p_{kj} \lim_{t\to\infty} p_{i,k}^{(t)} = \sum_k p_{kj}\,\pi_k = \sum_k \pi_k\, p_{kj}$$

$\longrightarrow \quad \pi = \pi P$ $\qquad$ a) b) ✓

c) $E[T_{ii}] = \dfrac{1}{\pi_i}$

$m_{ij} = E[T_{ij}]$ $\qquad$ Víme, že $m_{ij} < \infty$

Zřejmě: $\quad m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\, m_{kj}$



$$\Rightarrow \quad \sum_i \pi_i m_{ij} = 1 + \sum_i \pi_i \sum_{k\neq j} p_{ik}\, m_{kj}$$

$$= 1 + \sum_{k\neq j} \underbrace{\Big(\sum_i \pi_i\, p_{ik}\Big)}_{\pi_k} m_{kj} = 1 + \sum_{k\neq j} \pi_k m_{kj}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_j m_{jj} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_{ii} = \frac{1}{\pi_i} \qquad \blacksquare$$

Jak hledat π:

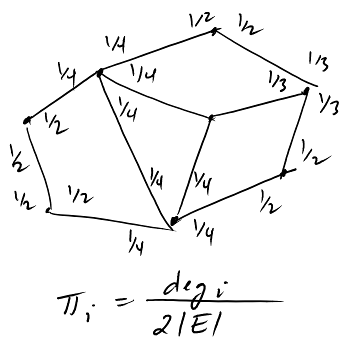
pokud pro nějaké $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n)$ platí rovnice

$$\forall i,j \qquad \pi_i\, p_{ij} = \pi_j\, p_{ji}$$

pak π je stacionární rozdělení.

Takovým m.ř. se říká (časově) reverzibilní.

Př.:

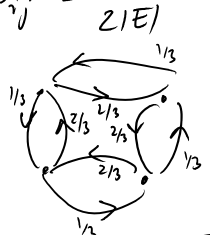


náhodná procházka na neorientovaném grafu

$$\pi_i = \frac{\deg i}{2|E|} \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1/\deg i & i \sim j \\ 0 & i \not\sim j \end{cases}$$

$$\pi_i\, p_{ij} = \frac{1}{2|E|} = \pi_j\, p_{ji} \qquad \blacksquare$$

Př.:



není časově reverzibilní

$$\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$$

Spojový seznam

n ... prvků, p_i ... pst. vyhledání prvku i.

pokud $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \dots \geq p_n$ pak optimální uspořádání $\mathbb{E}[A] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot i$

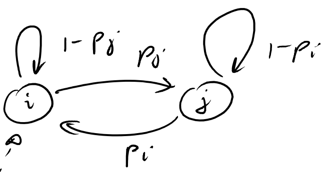
$$1 \to 2 \to 3 \; - - - - \to n$$

problém – neznámé p_i ⟶ move-to-front pravidlo

⟶ vyhledaný prvek přesuň na začátek seznamu

→ Seznam se chová jako m.p. se $n!$ stavy

uvažujme ale



"i je v seznamu před j"

$p_i, p_j \neq 0$ – aper., ired.

$$[\pi_i, \pi_j] \begin{bmatrix} 1-p_j & p_j \\ p_i & 1-p_i \end{bmatrix} = [\pi_i, \pi_j]$$

$$\pi_i = \frac{p_i}{p_i + p_j} \qquad \pi_j = \frac{p_j}{p_i + p_j}$$

$D_i^{(t)}$ ... hloubka i-tého prvku po t přístupech

$$\mathbb{E}[A_t] = \sum_i p_i \, \mathbb{E}[D_i^{(t)}]$$

čas t-tého přístupu

$$= \sum_i p_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \Pr[j \text{ je před } i \text{ po } t \text{ přístupech}]\Big)$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[A_t] = \sum_i p_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \lim_{t \to \infty} \Pr[j \text{ je před } i \text{ po } t \text{ krocích}]\Big)$$

$$= \sum_i p_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i + p_j}\Big)$$

$$= 1 + \sum_{i \neq j} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j}$$

$$= 1 + 2 \sum_i p_i \sum_{j < i} \frac{p_j}{p_i + p_j}$$

$$\leq 1 + 2 \sum p_i (i-1)$$

$$< 2 \sum i p_i$$

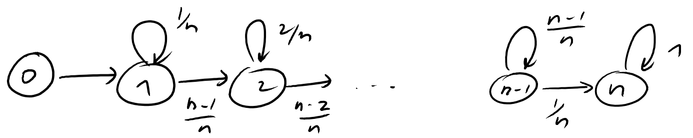
⟶ p. $\mathbb{E}[A_t] \leq 2\,\mathbb{E}[A]$

$< 2 \sum_i i p_i$

$\longrightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[A_t] \le 2\,\mathbb{E}[A]$

Michal Koucky at 17. 3. 2016 21:58

- sběratel kupónů



$p_{i,i+1} = \frac{n-i}{n} \qquad p_{i,i} = \frac{i}{n}$

$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots N_{n-1} + 1$

N ... čas přechodu z $0 \to n$

N_i ... čas strávený v i

$\Pr[N_i \ge k] = \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1} \qquad \forall k, i \ge 1$

$\mathbb{E}[N_i] = \sum_{k\ge 1} \Pr[N_i \ge k] = \frac{1}{1-\frac{i}{n}} = \frac{n}{n-i}.$

$\mathbb{E}[N_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[N_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \cdot H_n$

$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \qquad H_n \sim \ln n$

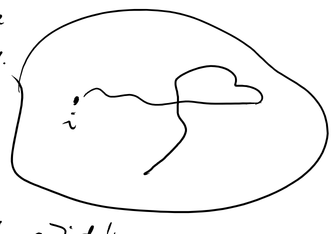
Procházky na grafech

$G = (V, E)$

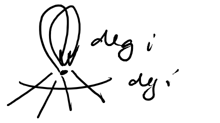
- časy přechodu T_{ij}
- čas pokrytí T_i při začátku ve vrcholu $i \in V$

$T_i = \min\{t, \{X_0, X_1, .. X_t\} = V;\ X_0 = i\}$

- mixing time
  ... rychlost konvergence ke stacionárnímu rozd.



→ v každém vrcholu i přidáme $\deg i$ smyček, abychom měli aperiodický m.ř.

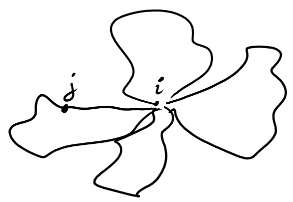


- stacionární distribuce $\pi_i = \frac{\deg i}{2|E|}$

$\mathbb{E}[T_{ii}] = \frac{2|E|}{\deg i}$

- $T_{iji} \overset{def}{=} T_{ij} + T_{ji}$

p … pst, že během návratu do i navštívím j.



$T^{-j}_{i,i}$ … střední doba návratu do i za podmínky nenavštívení j během procházky $i \to i$

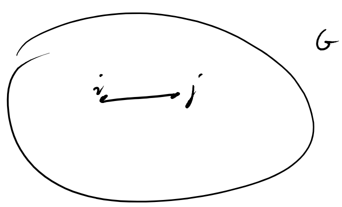
$T^{+j}_{i,i}$ … střední doba návratu do i za podmínky navštívení j během procházky $i \to i$

$$\mathbb{E}[T_{i,i}] = (1-p)\,T^{-j}_{i,i} + p\,T^{+j}_{i,i} \qquad [p \in (0,1)]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{i,j,i}] &= \sum_{k\ge 0} (1-p)^k \cdot p\,[k \cdot T^{-j}_{i,i} + T^{+j}_{i,i}] \\
&= T^{-j}_{i,i} \Big(\underbrace{\sum_{k\ge 0}(1-p)^k k}\Big) \cdot p + p \cdot T^{+j}_{i,i} \sum_{k\ge 0} (1-p)^k \\
&= T^{-j}_{i,i} \cdot \frac{1-p}{p} + T^{+j}_{i,i}\, p \cdot \frac{1}{p} \\
&= T^{-j}_{i,i} \frac{1-p}{p} + T^{+j}_{i,i} \\
&= \frac{\mathbb{E}[T_{i,i}]}{p}
\end{aligned}$$

- Všimněte si, střední počet návratů do i, než navštívím j je $\frac{1}{p} - 1$.

Př:



$i \sim j$

$$p \ge \frac{1}{\deg i}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[T_{i,j,i}] \le \mathbb{E}[T_{i,i}] \cdot \deg i = 2|E|. \quad \blacksquare$$

Př: $\Delta(i,j)$ … vzdálenost i a j

$$\mathbb{E}[T_{ij}] + \mathbb{E}[T_{ji}] \le \Delta(i,j) \cdot 2|E|$$

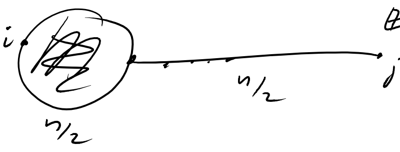
Dk: $i = v_0 \sim v_1 \sim v_2 \sim \ldots \sim v_k = j \qquad k = \Delta(i,j)$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{ij}] &\le \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[T_{v_{i-1}, v_i}] \\
\mathbb{E}[T_{ji}] &\le \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[T_{v_i, v_{i-1}}]
\end{aligned}\right\} \le k \cdot 2|E|$$

$$T_{ij} \le T_{v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k} \quad \blacksquare$$

$\to \max T_{ij} \le n \cdot 2|E|$

lízátko



$\mathbb{E}[T_{ij}] = \Theta(n^3)$

→ doba pokrytí

$$\mathbb{E}[T_i] \le (n-1)\cdot 2|E|$$

→ uvažme kostru G a Eulerovskou procházku podél této kostry, každá hrana je projita tam i zpět za střední dobu $\le 2|E|$.

Věta: (Matthews)
Mějme graf $G=(V,E)$ a množinu $A=\{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subseteq V$. Vezměme náhodnou procházku počínající v a_0. Nechť T je doba, za kterou navštívím všechny vrcholy v A (doba pokrytí A). Pak

$$\mu_-(A)\cdot H_k \le \mathbb{E}[T] \le \mu_+(A)\cdot H_k,$$

kde $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$, $\quad \mu_-(A) = \min_{u,v\in A} \mathbb{E}[T_{u,v}]$

$$\mu_+(A) = \max_{u,v\in A} \mathbb{E}[T_{u,v}].$$

Dokážeme nejprve slabší verzi:

$$\mathbb{E}[T] \le 4\cdot\mu_+(V)\cdot \lg(n+1)$$

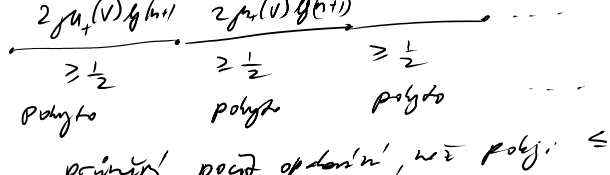
Dk: $\forall u,v\in V$ $\quad \Pr[$procházka z u navštíví v během $2\mu_+(V)$ kroků$] \ge \frac{1}{2}$

· Markov: $\Pr[T_{uv} > 2\,\mathbb{E}[T_{uv}]] \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Pr[$procházka z u nenavštíví v během $2\mu_+(V)\cdot l$ kroků$] \le \frac{1}{2^l}$

$\Rightarrow \Pr[$procházka z u nenavštíví v během $2\mu_+(V)\lg(n+1)$ kroků$] \le \frac{1}{2n}$.

$\Rightarrow \Pr[$procházka z u nepokryje V během $2\mu_+(V)\lg(n+1)$ kroků$] \le \frac{1}{2}$



průměrný počet opakování, než pokryji ≤ 2

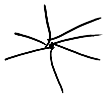
$\Rightarrow 4\cdot\mu_+(V)\lg(n+1)$ ∎

Náhodné procházky na stromech

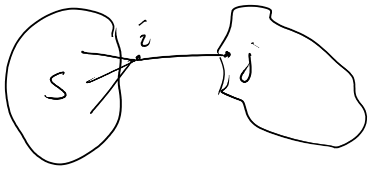
$\mathbb{E}[T] \le 2\cdot|V|\cdot|E| \le 2n^2$

Př:

$\Theta(n^2)$



$\Theta(n \lg n)$



[Moon]: $i \sim j$; $\mathbb{E}[T_{ij}] = 2|S| - 1$

Dk: N ... počet návratů do i, než přejdu $i \to j$

$$\Pr[N=k] = \frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)^k \qquad k \ge 1$$

$$d = \deg i$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[N=k]\cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)^k = d-1$$

T_{ii}^S ... doba návratu do i, když neopustím S

$$\mathbb{E}[T_{ii}] = \frac{2(|S|-1)}{d-1} \leftarrow 1/\text{stacionární na } S$$

$$\mathbb{E}[N]\cdot\mathbb{E}[T_{ii}]+1 = 2(|S|-1)+1 = 2|S|-1 \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ i,j ve vzdálenosti Δ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[T_{ij}] \le (2n-3)\Delta$.

Př: d-ární zakořeněný strom

$$\Delta \le 2\log_d n$$

$$\mathbb{E}[T_{ij}] \le (2n-3)\lg_d n$$

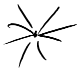
$\Rightarrow$ (Matthews) $\mathbb{E}[T] \le \dfrac{4n\cdot\lg^2 n}{\lg d}$

- pro $i \sim j$ $\quad \mathbb{E}[T_{ij}] \ge \delta(i,j)^2$
- strom s L listy
  - pevný list i $\Rightarrow$ $\exists$ list ve vzdálenosti $\ge \dfrac{n-1}{L-1}$

    očekávaná doba pokrytí stromu z i

    $$\mathbb{E}[T_i] \ge \frac{(n-1)^2}{(L-1)^2}$$
  - pevný list j $\quad \mathbb{E}[T_{ij}] \ge 2n-3$ [Moon]

[Matthews] $\rightarrow$ $E[T_i] \geq (2n-3)\, H_L$

těsné pro 

pro všechny stromy

$$E[T_i] \geq \min_{\substack{2 \le u \le n-1 \\ u \text{ celé}}} \max\left((2n-3)(\ln u - 1), \frac{(n-1)^2}{(u-1)^2} \right)$$

$$n \ln u = \frac{n^2}{u^2} \Rightarrow u \sim \sqrt{\frac{n}{\lg n}}$$

$$E[T_i] \geq \Omega(n \lg n).$$

<u>Věta [Matthews]</u>: Mějme graf $G=(V,E)$ a $A = \{a_0 .. a_k\} \subseteq V$. Uvažujme náhodnou procházku na G začínající v a_0. Nechť T je čas za který navštívíme všechny vrcholy v A. Pak

$$\mu_-(A) \cdot H_k \le E[T] \le \mu_+(A) \cdot H_k,$$

kde $H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ a $\mu_+(A) = \max_{i \neq j} E[T_{a_i, a_j}]$

$$\mu_-(A) = \min_{i \neq j} E[T_{a_i a_j}].$$

$H_k = \ln n + o(1)$

<u>Dk:</u> vezměme si náhodnou permutaci $s_1, \dots s_k$

def. n.p. $Y_i = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \dots a_{s_i}\}$

Nechť S_i je čas, kdy jsou všechny vrcholy v Y_i pokryty. Nechť $S_0 = 0$.

Polož $R_i = S_i - S_{i-1}$

Zřejmě $T = S_k = \sum_{i=1}^{k} R_i$

1) $\Pr[R_i \neq 0] = \frac{1}{i}$

$R_i \neq 0$ iff a_{s_i} je navštíveno po Y_{i-1}.

Podmíněno danou procházkou a danou množinou $Y_i = \{y_1, \dots y_i\}$, pravděpodobnost, že a_{s_i} není v Y_{i-1} je $\frac{1}{i}$.

2) podmíněno výběrem $s_1, \dots s_k$, procházkou až do času S_{i-1}, kde a_{s_i} není pokryto $\le S_{i-1}$, nechť $a_j = X_{S_{i-1}}$. Pak

$$E[R_i \mid R_i \neq 0] = E[T_{a_j, a_{s_i}}]$$

$$\Rightarrow \mu_-(A) \le E[R_i \mid R_i \neq 0] \le \mu_+(A)$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[R_i] = \left(1-\frac{1}{i}\right)\cdot 0 + \frac{1}{i}\,\mathbb{E}[R_i \mid R_i \neq 0]$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\mu_-(A) \le \mathbb{E}[T] \le \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\mu_+(A)$ ■

Př: 2-SAT

$\psi = (x_1 \vee \neg x_7) \,\&\, (\neg x_8 \vee \neg x_2) \,\&\, \dots (x_{20} \vee x_{30})$

Je ψ splnitelná?

Alg. pro 2-SAT

polož ohodnocení proměnných $a_0 = 0^n$.

Pro $i = 0, \dots n^3$

pokud a_i splňuje ψ, zastav a odpověz YES

jinak vyber (libovolnou) nesplněnou disjunkci

a z ní náhodně proměnnou j.

Polož $a_{i+1} = a_i \oplus e_j \qquad e_j = (\underbrace{0\dots01}_{j}0\dots0)$

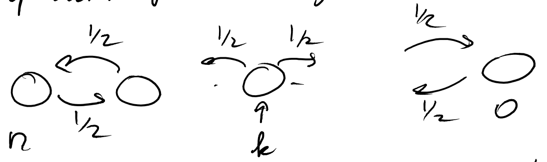
Pokud a_{n^3} nesplňuje ψ, odpověz NE.

Analýza

$a^* \dots \quad \psi(a^*) = 1$

v každém kroku pst. $\geq \frac{1}{2}$, že Hammingova vzdálenost mezi a^* a a_i klesne o jedna.

V opačném případě o jedna stoupne.



v nejhorším případě klesne vždy s pstí $= \frac{1}{2}$.

Pokud $d_H(a^*, a_0) = k$, jak dlouho trvá, než

$d_H(a^*, a_i) = 0$?

Odpověď: V průměrném případě nejvýše doba přechodu z k do 0 při procházce na přímce.

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[d_H(a^*, a_0) = k \rightarrow d_H(a^*, a_i) = 0] \le n^2.$

$\Rightarrow$ očekávaná doba zastavení alg. na splnitelné formuli $\le n^2$. (Algoritmus se může zastavit dříve nalezením jiného splňujícího ohodnocení)

$\Pr[$ Alg se nezastaví v čase $2n^2] \le \frac{1}{2}$

$\Pr[$ —||— $n^3] \le \frac{1}{2^{n/2}}$.

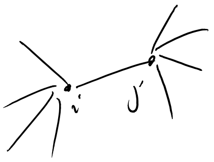
$\Rightarrow \quad \psi \notin$ 2-SAT ... vždy správná odpověď

$\psi \in$ 2-SAT ... správná odpověď s pstí $\geq 1 - 2^{-n/2}$ ■

Alternativní procházka na grafu.

chtěli bychom uniformní stacionární distribuci.

Dá se to zařídit? $\quad \pi_i = \frac{1}{n}$



potřebuji $\quad \pi_i\, p_{ij} = \pi_j\, p_{ji}$

$$\frac{1}{n} p_{ij} = \frac{1}{n} p_{ji}$$

$$p_{ij} = p_{ji}$$

Možnosti: 1) $p_{ij} = \frac{1}{n} \quad \forall i \neq j$

$p_{ii} = 1 - \sum'_{j \sim i} p_{ij} \quad \forall i$

2) $p'_{ij} = \min\left\{\frac{1}{\deg i}, \frac{1}{\deg j}\right\} \quad \forall i \neq j$

$p'_{ii} = 1 - \sum'_{j \sim i} p'_{ij} \quad \forall j$

3) $p''_{ij} = \frac{p'_{ij}}{1 - p'_{ii}} \quad \forall i \neq j$

$p''_{ii} = 0 \quad \forall i$

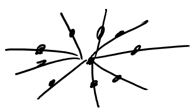
→ zbrklá varianta 2) bez smyček
nebude mít $\pi_i = \frac{1}{n}$, ale
bude mít stejnou dobou nebo lepší
dobu pokrytí grafu.

$\forall$

→ varianta 2) $\qquad$ T… doba pokrytí grafu G

- $\mathbb{E}[T] \leq O(n^2 \lg n)$

lepší než obyčejná náhodná procházka!
(pro konkrétní graf může být horší):



$\Theta(n^2 \lg n)$

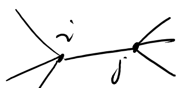
obyčejná $O(n \lg n)$)

Dk:

$i \sim j$

- $\mathbb{E}[T_{ij}] \leq \mathbb{E}[T_{ii}] \cdot \max\{\deg i, \deg j\}$

$\leq n \cdot \max\{\deg i, \deg j\}$



nejkratší cesta

$i \neq j$

$$\mathbb{E}[T_{ij}] \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{E}[T_{v_\ell, v_{\ell+1}}]$$

$$\leq \sum_{\ell}' n \cdot \max\{\deg v_\ell, \deg v_{\ell+1}\}$$

$$\leq n\, 2 \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} \deg v_\ell}_{\leq 3n} \leq n \cdot 2 \cdot 3n = 6n^2$$

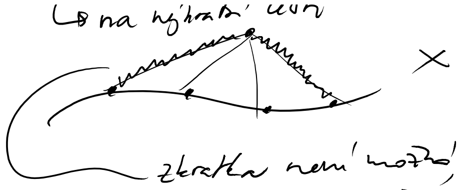
každý vrchol v_ℓ přispěje nejvýš $2 \times \deg v_\ell$

↳ na nejkratší cestě

×

u.c

↳ na nejkratší cestu



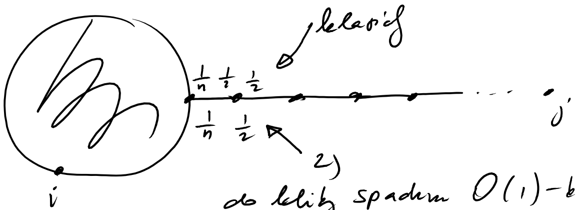
zkratka není možná!

→ každý z n vrcholů přispívá nejvýše až 3 stupni.

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[T_{ij}] \leq 6n^2$

$\xrightarrow{\text{Matthews}} \quad \mathbb{E}[T] \leq 6n^2 \ln n. \quad \blacksquare$

Př:



do lokality spadám $O(1)$-krát při cestě z i do j.

Obecně chci stacionární distr. π_i

$$\rightarrow \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\deg i} \min\left(\frac{\pi_j \deg i}{\pi_i \deg j}, 1\right) & i \sim j \\ 0 & i \not\sim j \\ 1 - \sum_{l \sim i} p_{il} & i = j \end{cases}$$

$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$:

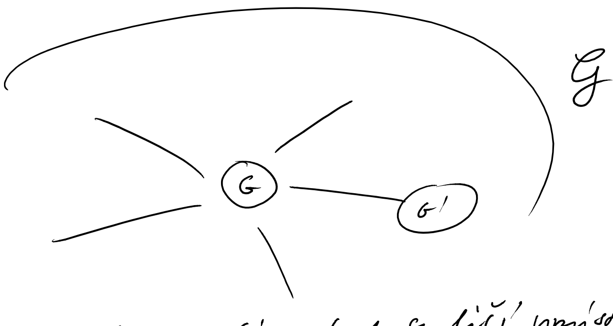
a) $\pi_j \deg i \geq \pi_i \deg j$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_i \cdot \frac{1}{\deg i}$$

$$\pi_j p_{ji} = \pi_j \frac{\pi_i}{\pi_j \deg i} = \frac{\pi_i}{\deg i} \quad \checkmark$$

b) $\pi_j \deg i < \pi_i \deg j$ symetricky ✓

Př: Generování náhodného souvislého grafu s $\underline{m}$ hranami.



G je spojeno s G', pokud se liší umístěním jedné hrany.

$\deg G \leq n^2 \cdot m$

Zvolím π_G = uniformní

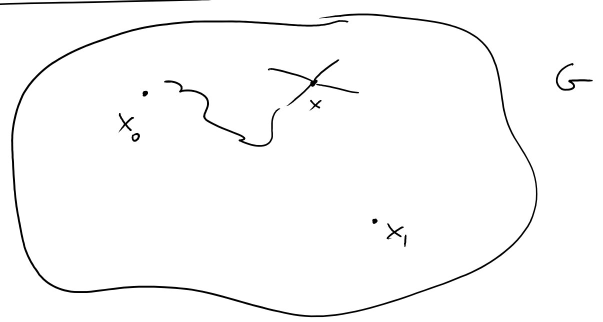
$P_{G,G'} = \min\left\{ \frac{1}{\deg G}, \frac{1}{\deg G'} \right\}$.

Náhodné procházky na $\mathcal{G}$ konvergují k rovnoměrnému rozdělení grafu.

<u>Otázka:</u> Jak rychle?

Elektrické obvody

Pravděpodobnost přechodu:



$X_0 = x, X_1, X_2 \dots$

$p_x = \Pr[\, x_1$ navštívíme dříve než x_0, když začneme v $x \,]$

$$p_x = \sum_{y \sim x} \frac{1}{\deg x} p_y = \frac{1}{\deg x} \sum_{y \sim x} p_y \qquad \forall x \neq x_0, x_1$$

$p_{x_0} = 0 \qquad p_{x_1} = 1$

$n = |V(G)| \Rightarrow n$ rovnic pro n neznámých

- zjevně existuje řešení, existuje jich více?

$p = (p_{x_0}, p_{x_1}, \dots\ p_{x_{n-1}})$

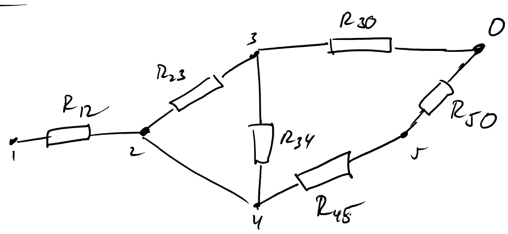
$p' = (p'_{x_0}, p'_{x_1}, \dots\ p'_{x_{n-1}})$

$d = p - p'$

d splňuje $\quad d_x = \frac{1}{\deg x} \sum'_{y \sim x} d_y \quad \forall x \neq x_0, x_1$

$d_{x_0} = 0 \quad d_{x_1} = 0$

Tvrdíme, že $d \equiv 0$. Nechť x je t.ž. $|d_x|$ je maximální. Pak sousedi d_x mají mít stejnou hodnotu jako d_x, tj. též maximální. Jejich sousedi též, atd. až se dostaneme k x_0, který má však hodnotu nulovou. ■



$V_1 = 1 \qquad V_0 = 0$

Jaký proud teče obvodem?

1) Ohmův zákon $\qquad I_{xy} = \dfrac{V_x - V_y}{R_{xy}}$

2) Kirchhoffův zákon

$\forall x \neq x_0, x_1 \qquad \sum'_{y \sim x} I_{xy} = 0$

$1 \& 2) \Rightarrow \quad \forall x \neq x_0, x_1 \qquad \sum'_{y \sim x} \dfrac{V_x - V_y}{R_{xy}} = 0$

$R_{xy} \equiv 1 \qquad \Updownarrow$

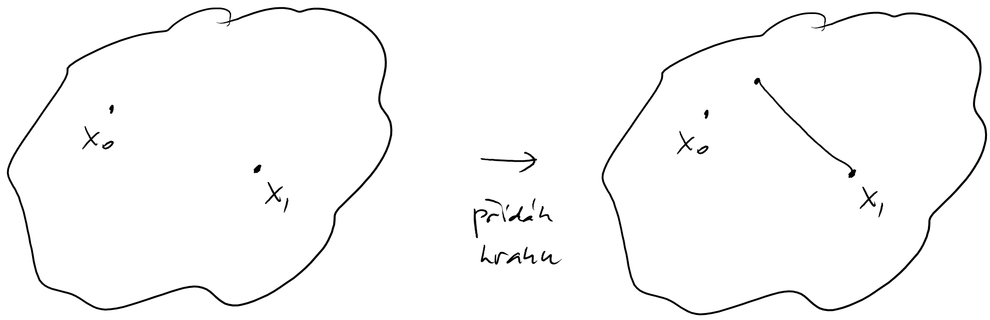
$V_x = \frac{1}{\deg x} \sum_{y \sim x} V_y$.

$V_{x_0} = 0 \quad V_{x_1} = 1$

$\Rightarrow$ řešení právě jedno $\Rightarrow$ identické s $p_{x_0} \cdots p_{x_{n-1}}$.

$V_{x_i} = p_{x_i}$

$G \qquad\qquad G^*$



pravděpodobnost úniku ... $p_A = \Pr$[přijdu do x_1 dříve, než se vrátím do x_0 počínaje v x_0]

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \sum_{y \sim x_0} p_y \qquad\qquad p_A^* \text{ v } G^*$$

obdobně

<u>Otázka</u>: $p_A^* > p_A$ nebo $p_A > p_A^*$?

$$p_y = V_y \quad y \sim x \qquad\qquad I_{yx_0} = \frac{V_y - 0}{1} = V_y$$

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \sum_{y \sim x_0} I_{yx_0}$$

$I_{tot} := \sum_{y \sim x_0} I_{yx_0}$ ... celkový proud v obvodu

$R_{eff}^{x_0,x_1}(G)$ ... efektivní odpor mezi x_0 a x_1 v G

$$I_{tot} = \frac{V_{x_0} - V_{x_1}}{R_{eff}^{x_0,x_1}(G)}$$

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \cdot \frac{1}{R_{eff}^{x_0 x_1}(G)}$$

<u>Věta</u> [Rayleighův princip monotonie]
Když snížíme odpor některého rezistoru v el. obvodě, tak efektivní odpor $R_{eff}^{x_0,x_1}(G)$ může jedině klesnout.

- <u>vyzářená energie</u> hrany $x \sim y$ s odporem R_{xy}, přes, kterou teče proud I_{xy}

$$E(x,y) \overset{def}{=} \frac{(V_x - V_y)^2}{\cdots} = I_{xy}^2 R_{xy}$$

R_{xy}

$$E_{tot} \overset{\text{def}}{=} \sum_{x\sim y} E((x,y))$$

Lema: $E_{tot} = \dfrac{(V_{x_0} - V_{x_1})^2}{R_{eff}^{x_0 x_1}(G)} = I_{tot}^2 \cdot R_{eff}^{x_0 x_1}(G)$

Dk.:
$$E_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} I_{ij}^2 R_{ij}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} (V_{x_i} - V_{x_j}) I_{ij}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} V_{x_i} \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij} - \sum_{j=0}^{n-1} V_{x_j} \sum_{i=0}^{n-1} I_{ij} \right) = *$$

$\forall\, i > 1 \quad \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij} = 0 \qquad V_{x_0} = 0$

$$\Rightarrow \quad * = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot V_{x_1} \sum_{j=0}^{n-1} I_{1j} = (V_{x_1} - V_{x_0}) I_{tot}$$
$$= \frac{(V_{x_1} - V_{x_0})^2}{R_{eff}^{x_0 x_1}(G)} \qquad \blacksquare$$

- Jednotkový tok z x_0 do x_1 je fce $J : E(G) \to [0,1]$

t.ž. 1) $\forall\, x \sim y \quad J_{xy} = -J_{yx}$

2) $\forall\, x \neq x_0, x_1 \quad \sum_{y\sim x} J_{x,y} = 0$

3) $\sum_{y\sim x_0} J_{x_0,y} = 1$

$\sum_{y\sim x_1} J_{y x_0} = 1$

- Jednotkový proud z x_0 do x_1 je jednotkový tok I z x_0 do x_1, t.ž. $\exists\, V : V(G) \to \mathbb{R}$

$V_{x_0} = 0$ & $\forall\, x \sim y \quad J_{xy} = \dfrac{V_x - V_y}{R_{xy}}$, kde $R_{xy} \equiv 1$

(tedy je to jednotkový tok splňující Ohmův zákon)

Věta: $\forall$ jednotkový tok J z x_0 do x_1 a jednotkový proud I z x_0 do x_1 platí $E(J) \geq E(I)$.

Dk: Nechť $V : V(G) \to \mathbb{R}$ je potenciál příslušející I

Vezmeme $D = J - I$

$$\sum_{x\sim y}' J_{xy}^2 \cdot R_{xy} = \sum_{x\sim y}' D_{xy}^2 R_{xy} + 2 I_{xy} D_{xy} R_{xy} + I_{xy}^2 R_{xy}$$

$$= \underbrace{\sum_{x\sim y}' D_{xy}^2 R_{xy}}_{\geq 0} + \underbrace{2 \sum_{x\sim y}' I_{xy} D_{xy} R_{xy}}_{\geq 0} + \sum' I_{xy}^2 R_{xy}$$

$\Rightarrow$ $I_{xy} R_{xy} = V_x - V_y$ z def. jednotkového proudu

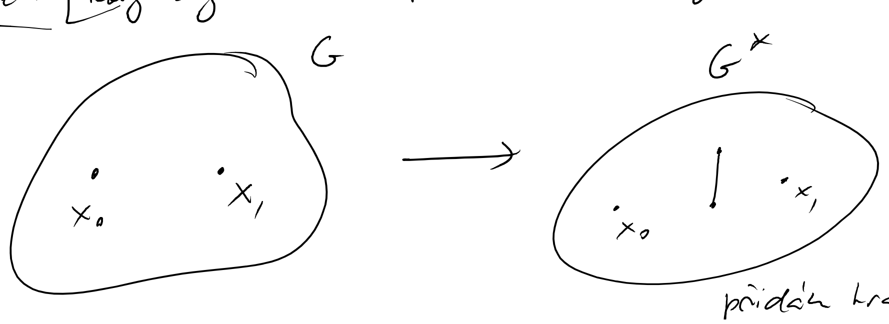
$$\sum_{x\sim y}' (V_x - V_y) D_{xy} = \sum_{x\sim y}' V_x D_{xy} - \sum_{x\sim y}' V_y D_{xy}$$

$$= \sum_x' V_x \underbrace{\sum_{y\sim x}' D_{xy}}_{=0} - \sum_y' V_y \underbrace{\sum_{x\sim y}' D_{xy}}_{=0}$$

$\Rightarrow$ $$\sum_{y\sim x}' D_{xy} = \underbrace{\sum_{y\sim x}' J_{xy}}_{=0} - \underbrace{\sum_{y\sim x}' I_{xy}}_{=0} \quad \blacksquare$$

z definice toku

Dk: [Rayleighův princip monotonicity]



přidání hrany / snížení

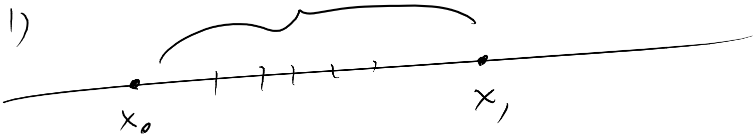
jednotkový proud I jednotkový proud I^* odpor hrany

$$R^{eff}_{x_0,x_1}(G) = E_G(I) \geq E_{G^*}(I) \geq E_{G^*}(I^*) = R^{eff}_{x_0,x_1}(G^*)$$

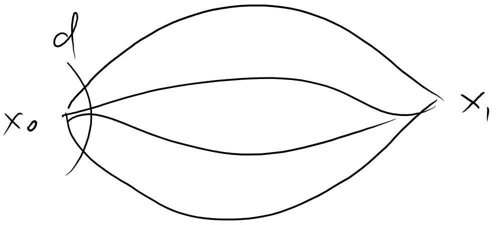
□

Př: cesta délky ℓ $R^{x_0 x_1}_{eff}(G) = \ell$

1)



2)



v G existuje $\geq d$ cest délky $\leq \ell$ mezi x_0 & x_1

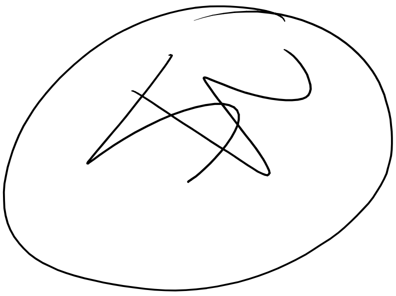
$\Rightarrow R^{eff}_{x_0,x_1} \leq \frac{\ell}{d}$

jednotkový tok ∂ pošle $1/d$ podél každé cesty,

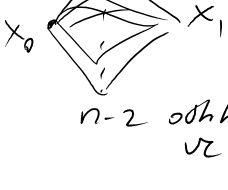
$$E(\partial) \leq \sum_{cesty} \frac{1}{d^2} \cdot \ell = \frac{\ell}{d}$$

$$\Rightarrow R^{eff}_{x_0,x_1}(G) \leq E(\partial) = \frac{\ell}{d}.$$

3) klika K_n



$R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \leq \frac{2}{n-2}$



$n-2$ ostatních vrcholů

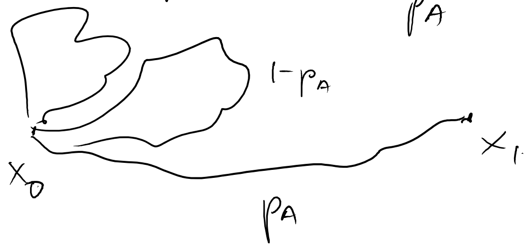
$\frac{1}{n-1} \leq R^{eff}_{x_0,x_1}$ protože jednotkový proud vyzáří alespoň $\frac{1}{n-1}$ na hranách $x_0 \sim y$.

Připomeňme si: P_A ... pst úniku z x_0 do x_1

$$p_A = \frac{1}{\deg x_0} \cdot \frac{1}{R^{eff}_{x_0,x_1}(G)}$$

… # návratů do x_0, než půjdu do x_1,

je v průměru $\frac{1}{p_A} = \deg x_0 \cdot R^{eff}_{x_0 x_1}(G)$.



Ukážeme: $E[T_{uvu}] = 2\,|E(G)| \cdot R^{eff}_{u,v}(G)$

doba přechodu $u \to v \to u$

Př:

$$R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \geq \frac{n}{2}$$

$$E[T_{x_0 x_1 x_0}] \geq 2 \cdot \frac{n^2}{4} \cdot \frac{n}{2} \geq \frac{n^3}{4}.$$

$$E[T_{x_0 x_1 x_0}] = E[T_{x_0 x_1}] + E[T_{x_1 x_0}]$$

$\Rightarrow$ $E[T_{x_0 x_1}]$ nebo $E[T_{x_1 x_0}] \geq \frac{n^3}{8}$ ■

Dk:

def: $H_{y x_1} = E[T_{y x_1}] \quad \forall y \neq x_1$

$$H_{x_1 x_1} = 0$$

$$H_{y x_1} = \frac{1}{\deg y} \sum_{z \sim y} H_{z x_1} + 1$$

Uvažujme tok na hranách $E(G)$ t.ž.

$\forall x \neq x_1 \qquad \sum_{y \sim x} I_{xy} = -\deg x$

$$\sum I_{x_1 y} = 2 \cdot E(G) - \deg x_1$$

$y \sim x_1$

tedy do každého vrcholu x tlačíme proud x a odebíráme $2 \cdot E(G)$ z x_1.

pro tento proud existuje napětí $V: V(G) \to \mathbb{R}$ které ho indukuje a kde $V_{x_1} = 0$

Jelikož $I_{xy} = V_x - V_y$ dostáváme

$$\forall x \neq x_1 \quad \sum_{y \sim x}' V_x - V_y = \deg x$$

$$\iff \quad V_x = \frac{1}{\deg x} \sum' V_y + 1$$

a $V_{x_1} = 0$

$\Rightarrow$ položením $V_y = H_{y x_1}$ získáme požadovaný tok (proud) obvodem

Podobně můžu definovat

$$H'_{y x_0} = E[T_{y x_0}] \qquad \text{pro } y \neq x_0$$

$$H'_{x_0 x_0}$$

a tok taký, že v každém uzlu x bude odebírat proud $\deg x$ a do uzlu x_0 bude vstřikovat celkově $2 \cdot E(G) - \deg x_0$.

opět, položíme-li $-H'_{y x_0}$ jako napětí V'_y a $V'_{x_0} = 0$, získáme taký proud.

Položme nyní $V'' = V + V'$. Jelikož všechno je lineární, napětí V'' indukuje v obvodu proud,

...

kde do x_0 vstřikuji $2\cdot E(G)$ a z x_1 odebírám $2E(G)$ a všechny ostatní uzly mají bilanci proudu 0.

→ Tedy I_{tot} mezi x_0 a x_1 při V'' je $2\cdot|E(G)|$.

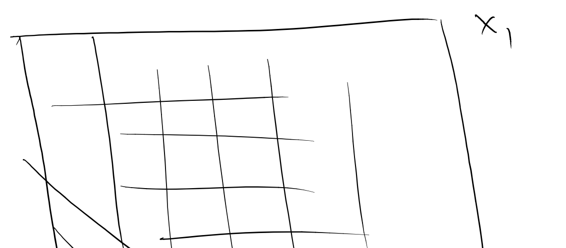
$$I_{tot} = \frac{V''_{x_0} - V''_{x_1}}{R^{eff}_{x_0,x_1}(G)} = \frac{V'_{x_0} + V''_{x_0} - V'_{x_1} - V''_{x_1}}{R^{eff}_{x_0 x_1}(G)} =$$

($V'_{x_0} = H_{x_0x_1}$, $V''_{x_0} = 0$, $V'_{x_1} = 0$, $V''_{x_1} = -H_{x_1x_0}$)

$$= \frac{H_{x_0x_1} + H_{x_1x_0}}{R^{eff}_{x_0x_1}(G)}$$

$$\Rightarrow \quad R^{eff}_{x_0x_1}(G)\cdot 2\cdot|E(G)| = E[T_{x_0x_1}] + E[T_{x_1x_0}]$$

Př: mřížka $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$



$$R^{eff}_{x_0x_1}(G) = \Theta(\lg n)$$

Hrany v $L_0, L_1, \dots L_{\sqrt{n}}$ tvoří disjunktní řezy mezi x_0 a x_1. $L_i = \Theta(i)$

Jednotkový proud I mezi x_0 a x_1 má vyzářenou energii: $E(I) \geq \Theta\left(\sum_i \frac{1}{i}\right) = \Theta(\lg\sqrt{n}) = \Theta(\lg n)$

energii: $E(I) \geq \Theta\left(\sum \frac{1}{i}\right) = \Theta(\lg \sqrt{n}) = \Theta(\lg n)$

Pokud $a_1, a_2, \dots a_{\ell = \Theta(i)}$ je proud přes hrany L_i,

pak $\sum_{i=1}^{\ell} a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} a_i^2 \cdot 1 \geq \frac{1}{\ell}$

$\Rightarrow R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \geq \Omega(\lg n)$.

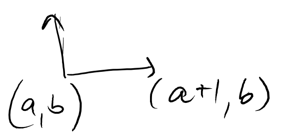
Dk:

$a_i = \frac{1}{\ell} + \varepsilon_i$

$$\sum a_i^2 = \sum \left(\frac{1}{\ell} + \varepsilon_i\right)^2 = \sum \frac{1}{\ell^2} + 2\frac{1}{\ell}\underbrace{\sum \varepsilon_i}_{=0} + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{\ell} + 0 + \text{"}\geq 0\text{"} \geq \frac{1}{\ell}$$

∎

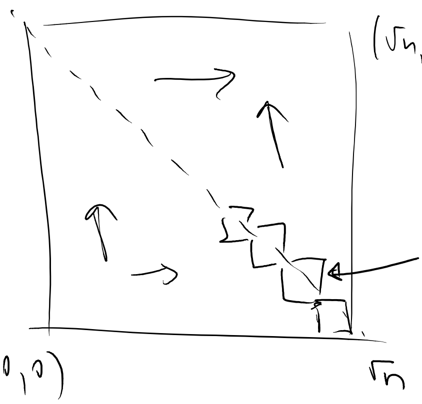
Jednotkový tok J



$$J_{(a,b)}(a+1,b) = \frac{a+1}{(a+b+2)} \cdot \frac{1}{(a+b+1)}$$

$$J_{(a,b)}(a,b+1) = \frac{b+1}{(a+b+2)} \cdot \frac{1}{(a+b+1)}$$

tok přes vrchol (a,b) je $\frac{1}{(a+b+1)}$



$\Rightarrow E(J) \geq E(I) = R^{eff}_{x_0 x_1}(G)$

$\wedge|$

$2 \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \frac{i+1}{(i+1)^2} \leq \lg n \quad \rightarrow \quad R^{eff}_{x_0 x_1}(G) \leq \lg n$

$\Rightarrow E[T_{x_0 x_1}] \leq 4n \cdot \lg n$

$\Rightarrow \quad E[C] \le 4n \lg^2 n$ ☒

- Pro d-dim mřížku, kde $d > 2$, $R^{eff}_{x_0 x_1}(b) = \Theta(\frac{1}{d})$.

bod $(a_1, \dots a_d)$ přenáší proud $\dfrac{1}{\binom{\sum a_i + d-1}{d-1}}$

a po hraně do $(a_1, \dots a_i+1, \dots a_d)$

posílá $\dfrac{a_i+1}{\sum a_i + d} \cdot \dfrac{1}{\binom{\sum a_i + d-1}{d-1}}$

Michal Koucky at 26. 5. 2016 10:12

Dynamický graf

$\mathcal{G} = G_1, G_2, \dots$ v čase t máme graf G_t

předpokládáme $V(G_t) = V(G_1) \quad \forall t$

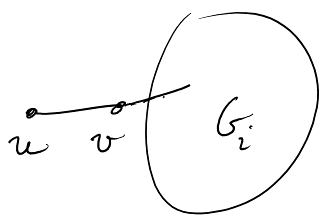
mění se pouze hrany

náhodná procházka:

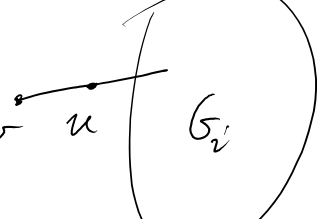
v čase t: jsem ve vrcholu u a udělám krok náhodné procházky na G_t

- $\mathcal{G}$ souvislý $\overset{def}{=} \forall t \; G_t$ souvislý

problém: na souvislém grafu $\mathcal{G}$ může náhodná procházka alternovat mezi dvěma vrcholy



pro i sudé



pro i liché

procházka z u v sudém čase alternuje mezi u & v.

• G je prozkoumatelný $\stackrel{def}{=}$ G je souvislý a v každém čase je v každém vrcholu smyčka

Tvrzení: Pokud je G prozkoumatelný, pak je jeho očekávaná doba pokrytí nejvýše $n^{O(n)}$.

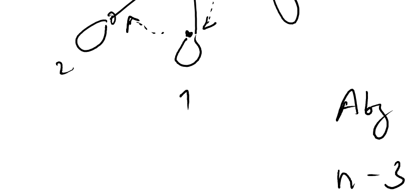
Dk: Zvol $u, v \in G$. Ukážeme, že existuje cesta z u do v v G.

$V_t = \{ w \in V(G)$; v čase t můžeme být v w při procházce z $u \}$

$V_t \neq V(G_t) \Rightarrow V_t \subsetneq V_{t+1}$: $V_t \subseteq V_{t+1}$ díky smyčkám
$V_t \neq V_{t+1}$ protože G_t je souvislý, existuje $w \in V(G_t) \setminus V_t$ spojený hranou s V_t.

$\Rightarrow$ $\exists$ cesta z u do v délky nejvýše n.
Tato cesta je vybrána s pstí $\geq \left(\frac{1}{n}\right)^n$.
$\rightarrow$ $E[T_{uv}] \leq n^n \underset{\text{Matthews}}{\Longrightarrow} E[C] \leq n^{O(n)}$ $\boxtimes$

Př:



vrchol 1..n se točí podle naznačených šipek "-->".

Aby se procházka z 1 dostala do n, musí $n-3$ kroků použít smyčku a poté udělat krok do n $\rightarrow$ pst. 2^{-n-2}, že se tohle v daných $n-2$ krocích stane.

$$\Rightarrow E[T_{1,n}] \geq 2^{-\Omega(n)}.$$

- podobný příklad existuje i s grafy se stupněm vrcholů ≤ 4.

- problém je způsoben různými stupni vrcholů $\Rightarrow$ měnící se stacionární distr.

<u>Věta:</u> Pro d-regulární prozkoumatelný G platí:

$$E(C) = O(d\, n^3 \lg^2 n)$$

<u>Lema:</u> A symetrická matice, stochastická, souvislá.

Nechť $\delta > 0$ je takové, že $\min_{\substack{i,j \\ A_{ij} \neq 0}} A_{ij} \geq \delta$.

Pokud $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla A pak

1) $\lambda_1 = 1$; $\forall i \geq 2, \lambda_i \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$

2) Pokud $\forall i\ A_{ii} \geq \gamma$, pak $\forall i\ \lambda_i \geq -(1-2\gamma)$

3) Pokud $\forall i\ A_{ii} > 0$, pak $\forall i\ \lambda_i^2 \leq 1 - \frac{\delta}{n^2}$

<u>Dk:</u> A je reálná & symetrická $\Rightarrow$ reálná vlastní čísla & vektory

1) A stochastická $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ & $e_1 = \mathbb{1}$

Uvažme vlastní vektor $x \perp \mathbb{1}$ s vlastním číslem λ.

WLOG $\sum_i x^2 = 1$. $\quad \hookrightarrow \sum_i x_i = 0$

Nechť t je t. ž. $|x_t| = \max_i |x_i|$ WLOG $x_t > 0$.

zjevně $x_t \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Nechť s je t. ž. $x_s = \min_i x_i$ $\quad x_i < 0$.

$\exists\ l_1, l_2, \dots l_k \in \{1, \dots, n\}$ $\quad k \leq n$

$l_1 = s \quad l_k = t \quad \& \quad A_{l_i, l_{i+1}} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k-1$

$\Uparrow$ A je souvislá

Uvažme $x(\mathbb{I} - A)x^T$ $\quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$1-\lambda = x(\mathbb{I}-A)x^T = -2\sum_{i<j} A_{ij} x_i x_j + \sum_i \Big[1-\big(1-\sum_{j\neq i} A_{ij}\big)\Big] x_i^2$$

$$= -2\sum_{i<j} A_{ij} x_i x_j + \sum_{i<j} A_{ij}(x_i^2 + x_j^2)$$

$$= \sum_{i<j} A_{ij}(x_i - x_j)^2$$

$$\geq \delta \sum_{i=1}^{k-1} (x_{\ell_i} - x_{\ell_{i+1}})^2$$

Cauchy-Schwarz $\geq \dfrac{\delta}{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_{\ell_i} - x_{\ell_{i+1}}\right)^2$

$$= \frac{\delta}{k-1}(x_s - x_t)^2 \geq \frac{\delta}{n^2}$$

2) znovu $x_t = \max_i |x_i| > 0$

příspěvek diagonály

$y = xA$ $\qquad \lambda x_t = y_t \geq \gamma x_t - (1-\gamma) x_t$

$$\geq -(1-2\gamma) x_t$$

$$\Rightarrow \lambda \geq -(1-2\gamma)$$

3) $\quad$ 1) & 2) $\Rightarrow$ 3) $\qquad \blacksquare$

<u>Lemma</u>: G je neorientovaný d-regulární graf na n vrcholech, $p = (p_1 \dots p_n)$ je pstní rozdělení na jeho vrcholech. A_G je matice přechodu n.p. na G. Pak:

1)
$$\left\| pA_G - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2 \leq \left\| p - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2$$

2) pokud A_G je souvislý, na diagonále nejsou nuly a všechny nenulové položky jsou $\geq \delta$ pak

$$\left\| pA_G - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2 \leq \left(1 - \frac{\delta}{n^2}\right) \left\| p - \frac{\mathbb{1}}{n} \right\|_2^2$$

ortonormální báze.

Dk: 2) $\alpha_1, \dots \alpha_n$ vlastní vektory A_G pro vlastní čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$. A_G symetrická & stoch.

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \& \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\| p A_G - \frac{\mathbb{1}}{n} \|_2^2 = \| p A_G - \frac{\mathbb{1}}{n} A_G \|_2^2$$

$$= \| (p - \frac{\mathbb{1}}{n}) A_G \|_2^2$$

jelikož $(p - \frac{\mathbb{1}}{n}) \perp \mathbb{1}$ $\quad \exists \beta_2, \dots \beta_n$

$$p - \frac{\mathbb{1}}{n} = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \alpha_i$$

$$\| p - \frac{\mathbb{1}}{n} \|_2^2 = \langle p - \frac{\mathbb{1}}{n}, p - \frac{\mathbb{1}}{n} \rangle$$

$$= \langle \sum_{i \geq 2} \beta_i \alpha_i , \sum_{i \geq 2} \beta_i \alpha_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} \beta_i^2$$

$$\| (p - \frac{\mathbb{1}}{n}) A_G \|_2^2 = \| \sum_{i=2}^{n} \beta_i \alpha_i A_G \|_2^2 = \| \sum \lambda_i \beta_i \alpha_i \|_2^2$$

$$= \sum \lambda_i^2 \beta_i^2$$

podle předpokladu lemmatu $\lambda_2^2, \dots \lambda_n^2 \leq (1 - \frac{\delta}{n^2})$

Tedy: $\quad \| (p - \frac{\mathbb{1}}{n}) A_G \|^2 \leq (1 - \frac{\delta}{n^2}) \sum \beta_i^2$

$$= (1 - \frac{\delta}{n^2}) \| p - \frac{\mathbb{1}}{n} \|_2^2$$

2) stejný důkaz, pouze na konci použijeme $\lambda_1^2, \dots \lambda_n^2 \leq 1$. ∎

$$\Rightarrow \quad \| p^{(t)} - \frac{\mathbb{1}}{n} \| \leq \left(1 - \frac{1}{d n^2}\right)^t \| p^{(0)} - \frac{\mathbb{1}}{n} \|_2^2$$

$\Rightarrow$ po dn^2 krocích jsme téměř uniformní

$\Rightarrow$ coupon collector